# VII. Robotermodellierung III

Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Dillmann

# Robotermodellierung

- Geometrische Modellierung
  Geometrie:
  mathematische Beschreibung der Form von Körpern
- Kinematische Modellierung
  Kinematik:
  Lehre der geometrischen und analytischen Beschreibung der Bewegungszustände mechanischer Systeme
- Dynamische Modellierung
  Dynamik:
  Untersuchung der Bewegung von Körpern als Folge der auf sie wirkenden Kräfte und Momente

# Inhalt

- Dynamisches Modell
- Modellierung der Dynamik
  - Methode nach Lagrange
  - Methode nach Newton-Euler

# Dynamisches Modell

## Definition

Das dynamische Modell berechnet den Zusammenhang von Kräften, Momenten und Bewegungen, welche in einem mechanischen Mehrkörpersystem auftreten.

## Zweck des dynamischen Modells

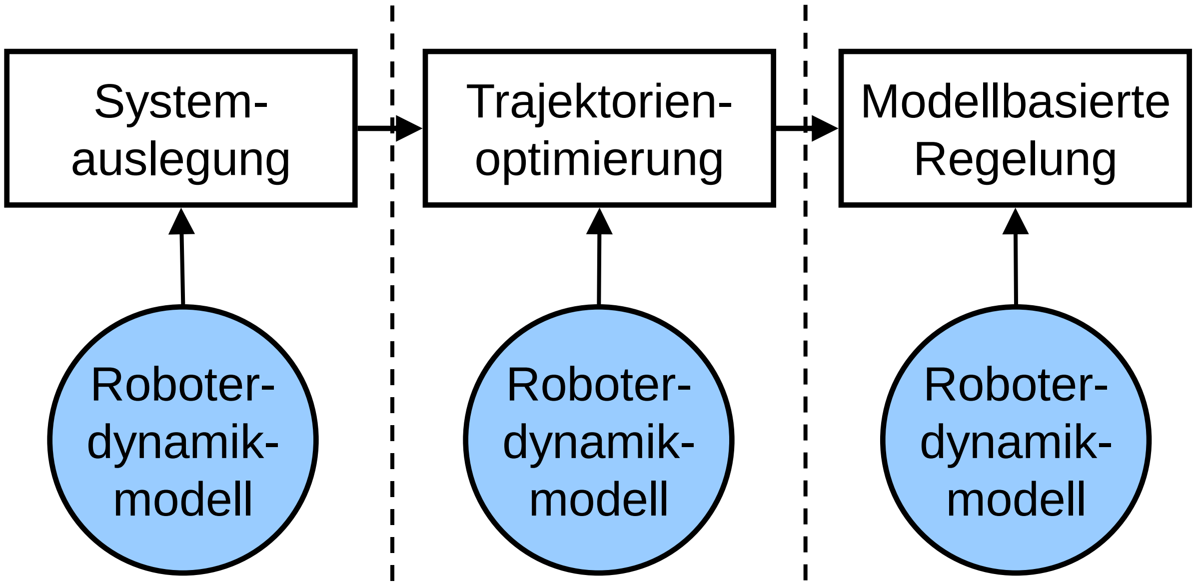
–Analyse der Dynamik

–Synthese mechanischer Strukturen

–Modellierung elastischer Strukturen

–Reglerentwurf

## Anwendung dynamischer Modellierung




**Phasen von Roboter-Entwicklung und -Betrieb**

- Getrennte Modellierung in unterschiedlichen Phasen
- Hoher Zeitaufwand, Fehler und Inkonsistenzen wahrscheinlich
- Wiederverwendbarkeit des dynamischen Modells schwierig bei Änderungen (kinem. Struktur, Gelenke, Antriebe)

## Generalisierte Koordinaten

### Definition:

Reduzierter Satz von Koordinaten, der den aktuellen Systemzustand vollständig beschreibt. Alle Koordinaten des Satzes sind voneinander unabhängig.

### Beispiel:

Lage von *N* Massepunkten im Kartesischen Raum (Allgemeine Koordinaten):

$$R = (\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N) \Rightarrow 3N \quad \text{Koordinaten}$$

Generalisierte Koordinaten sind Gelenkwinkelstellungen:

$$\vec{q} = (q_1, \cdots, q_K) = (\theta_1, \cdots, \theta_K) \Rightarrow K \quad \text{Koordinaten}$$

Generalisierte Koordinaten berücksichtigen alle Zwangsbedingungen des Systems.

# Dynamisches Modell

## Bewegungsgleichung

Im dynamischen Modell werden die Beziehungen zwischen Kräften/Momenten und den Lagen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Armelemente dargestellt.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

| | |
|---|---|
| $\mathbf{Q}$ | : n x 1 Vektor der Stellkräfte und –momente (**Generalisierte Kräfte**) |
| $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ | : n x n Massenträgheitsmatrix |
| $\mathbf{n}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ | : n x 1 Vektor mit Zentrifugal- und Corioliskomponenten |
| $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ | : n x 1 Vektor mit Gravitationskomponenten |
| $\mathbf{R}$ | : n x n Diagonalmatrix zur Beschreibung der Reibungskräfte |
| $\mathbf{q}$ | : n x 1 Winkellagen des Manipulators |

## Direktes dynamisches Problem

Aus äußeren Kräften und Momenten sowie Anfangszustand wird unter Verwendung des dynamischen Modells die sich ergebenden Bewegungsänderung berechnet.

**Geg.: Q(t)**

Direktes dynamisches Problem

**Ges.:** $\mathbf{q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)}$

$\mathbf{q(t_0), \dot{q}(t_0), \ddot{q}(t_0)}$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M(q)} \cdot \mathbf{\ddot{q}} + \mathbf{n(\dot{q}, q)} + \mathbf{g(q)} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{\dot{q}} \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ Gleichung (*) auflösen nach $\mathbf{q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)}$

# Dynamisches Modell

## Inverses dynamisches Problem

Aus den gewünschten Bewegungsparametern sollen, unter Verwendung des dynamischen Modells, die dazu erforderlichen Stellkräfte und Stellmomente ermittelt werden.

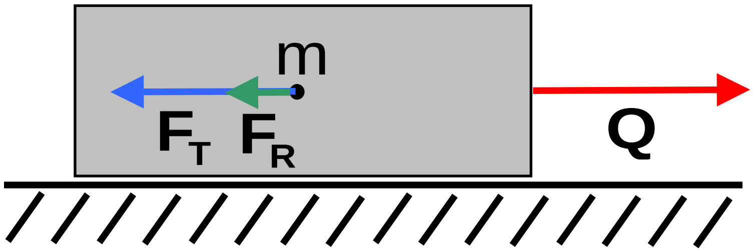
**Geg.:** $\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \ddot{\mathbf{q}}(t)$ → Inverses dynamisches Problem → **Ges.:** $\mathbf{Q}(t)$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{q}} \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ Gleichung (*) ausrechnen

# Dynamisches Modell

## Beispiel




$$F_T = -m\ddot{x}$$ Trägheit

$$F_R = -K_{GR}\dot{x}$$ Gleitreibung

$$Q$$ Externe Kraft

Kräftebilanz: $Q = -(F_T + F_R)$

Bewegungsgleichung: $Q = m\ddot{x} + K_{GR}\dot{x}$

**Direktes Problem**: gegeben externe Kraft **Q**, und aktueller Bewegungungszustand, berechne neue Beschleunigung und Geschwindigkeit.

**Inverses Problem**: gegeben Bewegungszustand, welche externe Kraft **Q** wirkt auf das System.

# Inhalt

- Dynamisches Modell
- Modellierung der Dynamik
  - Methode nach Lagrange
  - Methode nach Newton-Euler

## Lösungsmöglichkeiten

- Analytische Methode (Lagrange)
  - Arbeits- oder Energiebetrachtungen
  - Formales Ableiten ergibt die Bewegungsgleichungen
- Synthetische Methode (Newton-Euler)
  - Freikörperbild (Freischneiden)
  - Impuls- und Drallsatz
  - Elimination der Zwangskräfte

# Inhalt

- Dynamisches Modell
- Modellierung der Dynamik
  - Methode nach Lagrange
  - Methode nach Newton-Euler

# Methode nach Lagrange

## Bewegungsgleichung nach Lagrange

$$\mathbf{Q_i} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}\right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{q}_i}$$

*

mit der Lagrange-Funktion:

$$\mathbf{L} = \mathbf{E_{kin}} - \mathbf{E_{pot}}$$

Vorraussetzung:

- $q_k$ sind generalisierte Koordinaten unter Berücksichtigung aller Zwangsbedingungen

## Modellierung mit Lagrange

### Ziel:

Ermittle für jedes Gelenk i eines Roboters Bewegungsgleichung gemäß:

$$\mathbf{Q_i} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}\right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{q}_i}$$

### Vorgehen:

- Berechne $\mathbf{E_{kin}}$ und $\mathbf{E_{pot}}$
- Drücke $\mathbf{E_{kin}}$ und $\mathbf{E_{pot}}$ in generalisierten Koordinaten aus

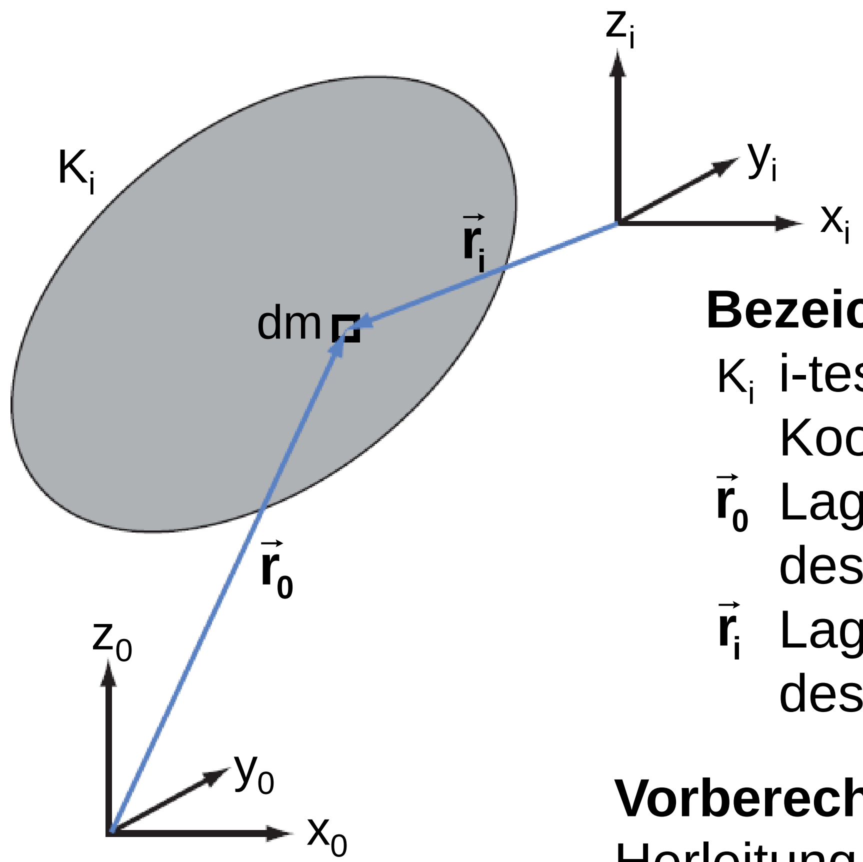
$$\Rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{E_{kin}} - \mathbf{E_{pot}}$$

- Berechne Ableitungen $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}, \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}\right), \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{q}_i}$

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichung

# Methode nach Lagrange

## Geometrische Vorbetrachtung (I)




**Bezeichnungen:**

- $K_i$ i-tes Armelement starr verbunden mit Koordinatensystem i
- $\vec{r}_0$ Lage eines Massepunktes m bezüglich des Basiskoordinatensystems
- $\vec{r}_i$ Lage eines Massepunktes m bezüglich des i-ten Koordinatensystems

**Vorberechnung:**
Herleitung der Positionsänderung des Massepunktes aus generalisierten Koordinaten.

## Geometrische Vorbetrachtung (II)

Aus DH-Matrizen: $\vec{r}_0 = A_{0,1}A_{1,2}\cdots A_{i-1,i}\vec{r}_i$

Ableitung mit Produktregel:

$$\frac{d}{dt}\vec{r}_0 = \frac{d}{dt}A_{0,1}A_{1,2}\cdots A_{i-1,i}\vec{r}_i + A_{0,1}\frac{d}{dt}A_{1,2}\cdots A_{i-1,i}\vec{r}_i + \cdots + A_{0,1}A_{1,2}\cdots\frac{d}{dt}A_{i-1,i}\vec{r}_i \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dt}A_{i-1,i} = \frac{d}{dt}f^{A}{}_{i-1,i}(q_i(t))$$

## Geometrische Vorbetrachtung (III)

Ableitung mit Kettenregel:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}_{i-1,i} = \frac{d}{dt}\mathbf{f}^{A}{}_{i-1,i}(\mathbf{q}_i(\mathbf{t})) = \frac{d}{d\mathbf{q}_i}\mathbf{f}^{A}{}_{i-1,i}\frac{d}{dt}\mathbf{q}_i$$

$$\frac{d}{d\mathbf{q}_i}\mathbf{f}^{A}{}_{i-1,i} = \mathbf{O}_{i-1,i}\mathbf{A}_{i-1,i}$$

mit: $\mathbf{O}_R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Rotationsgelenk $\quad \mathbf{O}_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Translationsgelenk

Bewegungsänderung des Gelenks

Transformation in aktuelle Gelenkstellung

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\mathbf{A}_{i-1,i} = \mathbf{O}_{i-1,i}\mathbf{A}_{i-1,i}\dot{\mathbf{q}}_i \qquad \textbf{(3)}$$

## Geometrische Vorbetrachtung (IV)

Mit **(2)** und **(3)** folgt:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\vec{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{O}_{0,1}\mathbf{A}_{0,1}\dot{\mathbf{q}}_1\mathbf{A}_{1,2}\cdots\mathbf{A}_{i-1,i}\vec{\mathbf{r}}_i + \cdots + \mathbf{A}_{0,1}\mathbf{A}_{1,2}\cdots\mathbf{O}_{i-1,i}\mathbf{A}_{i-1,i}\dot{\mathbf{q}}_i\vec{\mathbf{r}}_i \qquad \textbf{(4)}$$

Darstellung der Bewegung eines Massepunktes in Abhängigkeit der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten.

Definiere Produktmatrix:

$$\mathbf{P}^{j,i} = \mathbf{A}_{0,1}\mathbf{A}_{1,2}\cdots\mathbf{O}_{j-1,j}\mathbf{A}_{j-1,j}\dot{\mathbf{q}}_j\cdots\mathbf{A}_{i-1,i}$$

i: Anzahl Freiheitsgrade
j: Termindex

Summe der Produktmatrizen:

$$\mathbf{B}^i = \sum_{j=1}^{i}\mathbf{P}^{j,i}$$

Aus **(4)** folgt:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\vec{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{B}^i\vec{\mathbf{r}}_i \qquad \textbf{(5)}$$

# Methode nach Lagrange

## Kinetische Energie (I)

$$E_{kin,i} = \frac{1}{2} m \left( \frac{d}{dt} \vec{r}_0 \right)^T \frac{d}{dt} \vec{r}_0 \quad \overset{\frac{d}{dm}}{\Rightarrow} \quad dE_{kin} = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \vec{r}_0 \right)^T \frac{d}{dt} \vec{r}_0 dm$$

Mit: $\vec{v}^T \vec{w} = sp(\vec{v}\vec{w}^T) \qquad \vec{v}, \vec{w} \in \Re^{nx1}$

$$dE_{kin,i} = \frac{1}{2} sp\left( \frac{d}{dt} \vec{r}_0 \left( \frac{d}{dt} \vec{r}_0 \right)^T \right) dm$$

Mit **(5)** :

$$dE_{kin,i} = \frac{1}{2} sp\left( B^i \, \vec{r}_i (\vec{r}_i)^T (B^i)^T \right) dm$$

Integration über Masse $m_i$ des Körpers $K_i$ :

$$E_{kin,i} = \frac{1}{2} sp\left( B^i \int_{m_i} \vec{r}_i (\vec{r}_i)^T dm \, (B^i)^T \right)$$

# Methode nach Lagrange

## Kinetische Energie (II)

$$\mathbf{E}_{\mathbf{kin,i}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} sp\left( \mathbf{B}^{\mathbf{i}} \int_{\mathbf{m_i}} \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}} \left(\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}}\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{dm} \left(\mathbf{B}^{\mathbf{i}}\right)^{\mathbf{T}} \right)$$

Fasse Integral als Matrix auf: $\quad \mathbf{\Theta}^{\mathbf{i}} = \int_{\mathbf{m_i}} \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}} \left(\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}}\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{dm}$

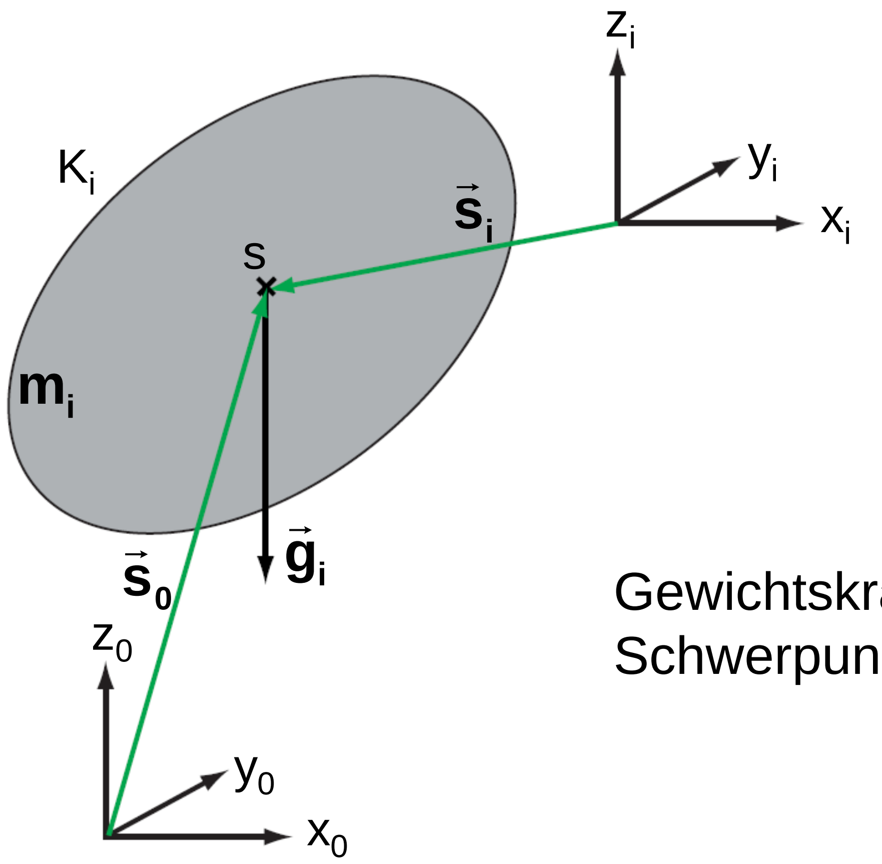
$$\mathbf{E}_{\mathbf{kin,i}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} sp\left( \mathbf{B}^{\mathbf{i}} \, \mathbf{\Theta}^{\mathbf{i}} \left(\mathbf{B}^{\mathbf{i}}\right)^{\mathbf{T}} \right)$$

Für die kinematische Energie des gesamten Systems ergibt sich:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{kin}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} sp\left( \mathbf{B}^{\mathbf{i}} \, \mathbf{\Theta}^{\mathbf{i}} \left(\mathbf{B}^{\mathbf{i}}\right)^{\mathbf{T}} \right) \qquad \textbf{(6)}$$

# Methode nach Lagrange

## Potentielle Energie




Gewichtskraft $g_i$ wirkt auf Körper $K_i$ im Schwerpunkt $s$.

## Potentielle Energie

$$\mathbf{E}_{\mathbf{pot,i}} = \mathbf{m_i g h} = -\left(\vec{\mathbf{g}}_{\mathbf{i}}\right)^{\mathbf{T}} \vec{\mathbf{s}}_{\mathbf{0}} \quad \text{wobei} \quad \left(\vec{\mathbf{g}}_{\mathbf{i}}\right)^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{m_i g} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Mit $\vec{\mathbf{s}}_{\mathbf{0}} = \mathbf{A}_{\mathbf{0,i}} \vec{\mathbf{s}}_{\mathbf{i}}$ folgt:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{pot,i}} = -\left(\vec{\mathbf{g}}_{\mathbf{i}}\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{A}_{\mathbf{0,i}} \vec{\mathbf{s}}_{\mathbf{i}}$$

Für die potentielle Energie des gesamten Systems ergibt sich:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{pot}} = -\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \left(\vec{\mathbf{g}}_{\mathbf{i}}\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{A}_{\mathbf{0,i}} \vec{\mathbf{s}}_{\mathbf{i}} \qquad \mathbf{(7)}$$

# Methode nach Lagrange

## Lagrange Funktion

$$\mathbf{L} = \mathbf{E}_{\mathbf{kin}} - \mathbf{E}_{\mathbf{pot}}$$

Mit **(6)** und **(7)** folgt:

$$\mathbf{L} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} \left[ sp\left( \mathbf{B}^{\mathbf{i}}\, \mathbf{\Theta}^{\mathbf{i}} \, \left(\mathbf{B}^{\mathbf{i}}\right)^{\mathbf{T}} \right) + \left(\vec{\mathbf{g}}_{\mathbf{i}}\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{A}_{\mathbf{0,i}} \vec{\mathbf{s}}_{\mathbf{i}} \right]$$

## Lagrange Bewegungsgleichung

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{i}} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}}} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{q}_{\mathbf{i}}}$$

Berechne $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}}}$ , $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}}} \right)$ , $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{q}_{\mathbf{i}}}$ aus **L**.

# Methode nach Lagrange

## Lagrange Bewegungsgleichung

$$Q_i = \sum_{k=i}^{n}\sum_{l=1}^{k} sp\left[P^{i,k}\Theta^k\left(P^{l,k}\right)^T\right]\ddot{q}_l - \sum_{k=i}^{n}\left(\vec{g}_k\right)^T P^{i,k}\vec{s}_k$$
$$+\sum_{k=i}^{n}\sum_{l=1}^{k}\sum_{m=1}^{k}\left[sp\frac{\partial}{\partial q_m}P^{i,k}\Theta^k\left(P^{l,k}\right)^T + \frac{\partial}{\partial q_m}P^{l,k}\Theta^k\left(P^{i,k}\right)^T\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial q_m}P^{l,k}\Theta^k\left(P^{m,k}\right)^T\right]\dot{q}_l\dot{q}_m$$

⇨ n Gleichungen zusammengefasst in Matrixschreibweise:

$$Q = M(\vec{q})\ddot{\vec{q}} + n(\dot{\vec{q}},\vec{q}) + g(\vec{q})$$

# Methode nach Lagrange

## Zusammenfassung

Zur Ermittlung der Bewegungsgleichungen müssen nur die kinetische und die potentielle Energie aufgestellt werden.

Die Bewegungsgleichungen folgen dann formal durch differenzieren:

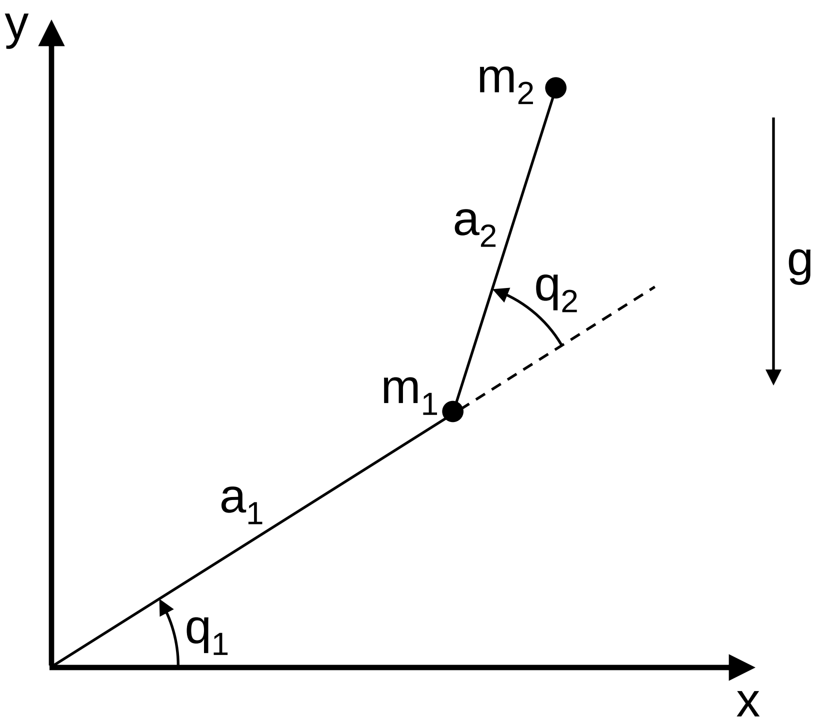
$$\mathbf{Q_i} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}}\right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{q_i}}$$

mit

$$\mathbf{L} = \mathbf{E_{kin}} - \mathbf{E_{pot}}$$

# Methode nach Lagrange

## Beispiel (I)

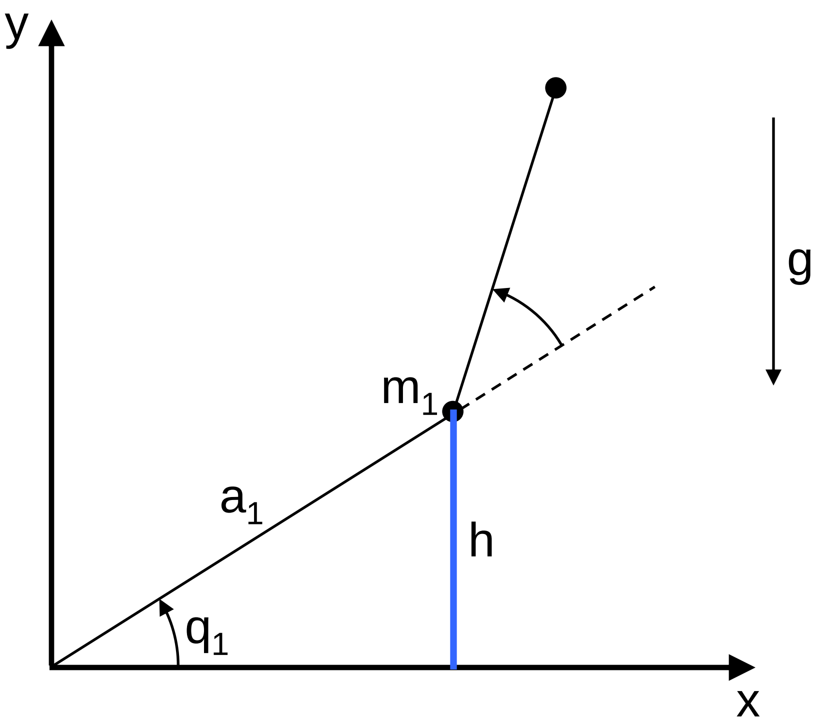



**Vereinfachung:**

- Masse der Armelemente in $m_1$ bzw. $m_2$ zusammengefasst
- Keine Reibung

# Methode nach Lagrange

## **Beispiel (II):** Gelenk 1

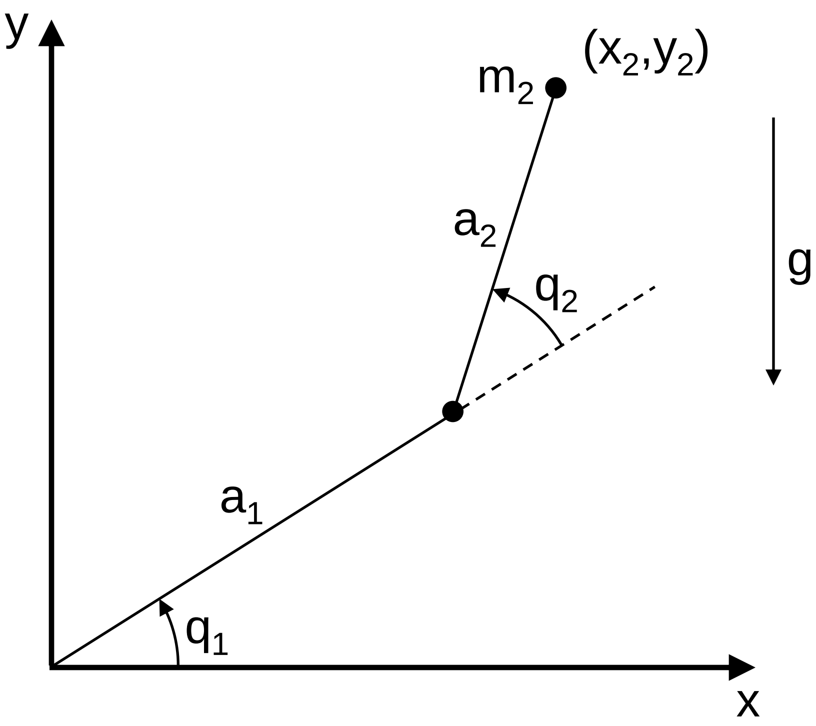



$$E_{kin,1} = \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 a_1^2 \dot{q}_1^2$$

$$E_{pot,1} = m_1 g h = m_1 g a_1 \sin(q_1)$$

# Methode nach Lagrange

## **Beispiel (III):** Gelenk 2




Position:

$$x_2 = a_1\cos(q_1) + a_2\cos(q_1 + q_2)$$

$$y_2 = a_1\sin(q_1) + a_2\sin(q_1 + q_2)$$

Geschwindigkeit:

$$\dot{x}_2 = -a_1\dot{q}_1\sin(q_1) - a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\sin(q_1 + q_2)$$

$$\dot{y}_2 = a_1\dot{q}_1\cos(q_1) + a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\cos(q_1 + q_2)$$

# Methode nach Lagrange

## **Beispiel (IV):** Gelenk 2

Kinetische Energie:

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = a_1^2\dot{q}_1^2 + a_2^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2a_1a_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2)\cos(q_2)$$

$$E_{kin,2} = \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_2a_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2a_2^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_2a_1a_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2)\cos(q_2)$$

Potentielle Energie:

$$E_{pot,2} = m_2gy_2 = m_2g\left[a_1\sin(q_1) + a_2\sin(q_1 + q_2)\right]$$

Lagrange Funktion:

$$L = E_{kin} - E_{pot} = E_{kin,1} + E_{kin,2} - E_{pot,1} - E_{pot,2}$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)a_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2a_2^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_2a_1a_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2)\cos(q_2)$$

$$-(m_1 + m_2)ga_1\sin(q_1) - m_2ga_2\sin(q_1 + q_2)$$

# Methode nach Lagrange

## **Beispiel (V):** Bewegungsgleichung

Gelenk 1:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2)a_1^2\dot{q}_1 + m_2 a_2^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_2 a_1 a_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\cos(q_2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2)a_1^2\ddot{q}_1 + m_2 a_2^2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 a_1 a_2 (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)\cos(q_2) - m_2 a_1 a_2 (2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)\sin(q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -(m_1 + m_2) g a_1 \cos(q_1) - m_2 g a_2 \cos(q_1 + q_2)$$

Gelenk 2:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2 a_2^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_2 a_1 a_2 \dot{q}_1 \cos(q_2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2 a_2^2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 a_1 a_2 \ddot{q}_1 \cos(q_2) - m_2 a_1 a_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -m_2 a_1 a_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2)\sin(q_2) - m_2 g a_2 \cos(q_1 + q_2)$$

# Methode nach Lagrange

## **Beispiel (VI):** Bewegungsgleichung

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1+m_2)a_1^2 + m_2 a_2^2 + 2m_2 a_1 a_2 \cos(q_2) & m_2 a_2^2 + m_2 a_1 a_2 \cos(q_2) \\ m_2 a_2^2 + m_2 a_1 a_2 \cos(q_2) & m_2 a_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -m_2 a_1 a_2 (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \sin(q_2) \\ m_2 a_1 a_2 \dot{q}_1^2 \sin(q_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1+m_2) g a_1 \cos(q_1) + m_2 g a_2 \cos(q_1+q_2) \\ m_2 g a_2 \cos(q_1+q_2) \end{bmatrix}$$

Zusammengefasst:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}(\vec{q})\ddot{\vec{q}} + \mathbf{n}(\dot{\vec{q}}, \vec{q}) + \mathbf{g}(\vec{q})$$

# Methode nach Lagrange

## Eigenschaften

- einfaches Aufstellen der Gleichungen
- geschlossenes Modell
- analytisch auswertbar
- Berechnung sehr umfangreich $O(n^3)$

  (n = Anzahl der Gelenke)
- nur Antriebsmomente werden berechnet

# Inhalt

- Dynamisches Modell
- Modellierung der Dynamik
  - Methode nach Lagrange
  - Methode nach Newton-Euler

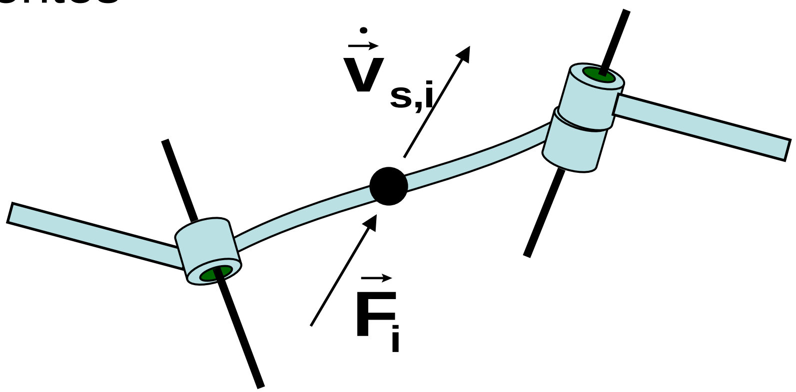
# Methode nach Newton-Euler

## Grundprinzip

Betrachtung eines einzelnen Armelementes

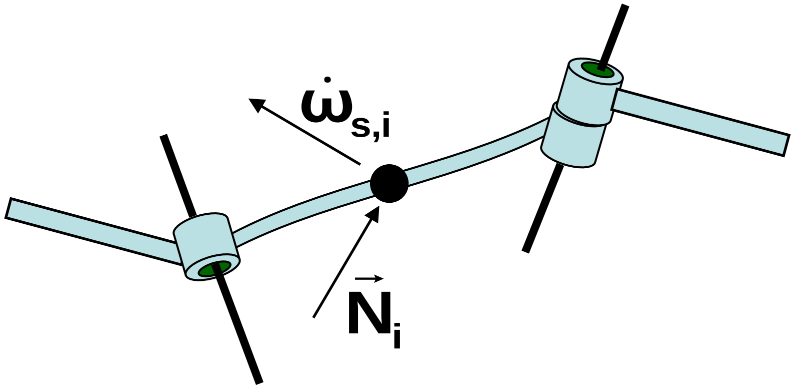
**2. Newtonsche Gleichung:**

$$\vec{F}_i = m_i \cdot \dot{\vec{v}}_{s,i}$$




**Euler Gleichung:** (Drallsatz)

$$\vec{N}_i = \vec{I}_i \cdot \dot{\omega}_{s,i}$$




⇨ Kräfte und Momente die auf ein Armelement wirken lassen sich aus Geschwindigkeit und Gelenkwinkelgeschwindigkeit berechnen.

# Methode nach Newton-Euler

## Grundprinzip

Verkettung der Armelemente

Die Beschleunigungen $\dot{\mathbf{v}}_{s,i}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{s,i}$ eines Armelementes i hängen von den Beschleunigungen der vorhergehenden Armelemente ab.

⇨ Beschleunigungen können über kinematische Modell von der Basis zum Greifer rekursiv berechnet werden **(Vorwärtsgleichungen).**

Die Kräfte und Momente $\vec{\mathbf{F}}_i$, $\vec{\mathbf{N}}_i$, die auf ein Armelement i wirken, hängen von den nachfolgenden Armelementen ab.

⇨ Kräfte und Momente können von Greifer zu Basis rekursiv berechnet werden (**Rückwärtsgleichungen**).

# Methode nach Newton-Euler

## Vorwärtsgleichungen

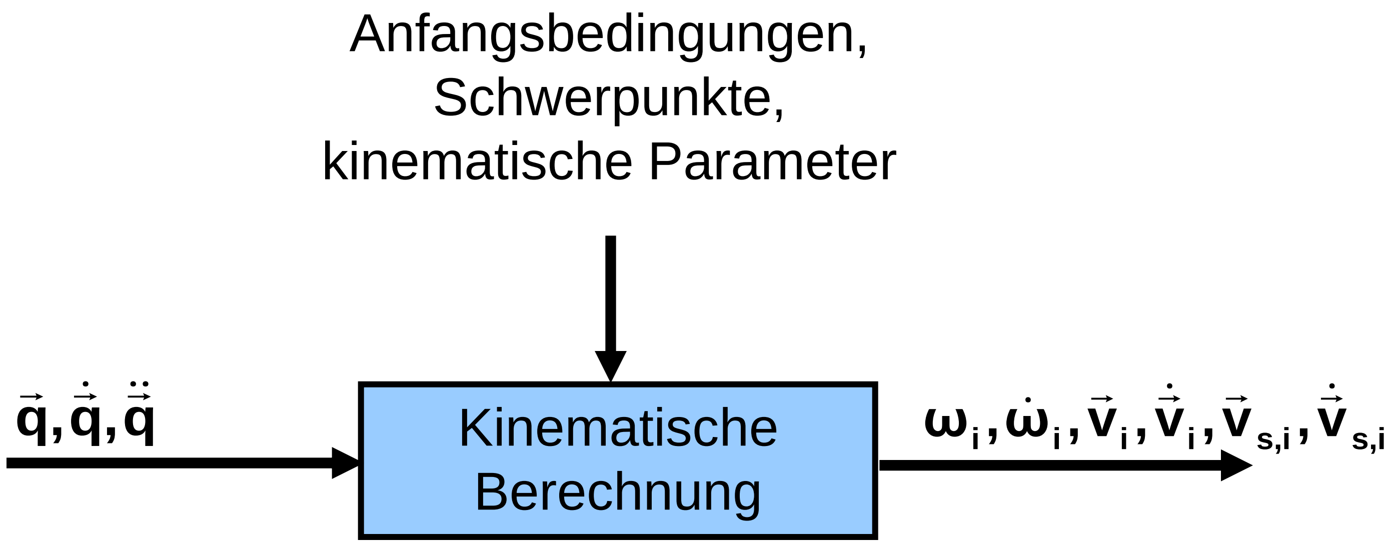
Aus dem kinematischen Robotermodell und dem Systemzustand lassen sich Winkelgeschwindigkeiten und translatorische Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Gelenkes und Armelementes i im Basiskoordinatensystem bestimmen.

Bestimmt werden:

- Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_i$
- Winkelbeschleunigung $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$
- Geschwindigkeit $\vec{\mathbf{v}}_i$ und Beschleunigung $\dot{\vec{\mathbf{v}}}_i$ der Basen der Koordinatensysteme
- Geschwindigkeiten $\vec{\mathbf{v}}_{s,i}$ und Beschleunigungen $\dot{\vec{\mathbf{v}}}_{s,i}$ der Massenmittelpunkte der Armteile

# Methode nach Newton-Euler

## Vorwärtsgleichungen




Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen für Armelement i+1 lassen sich **rekursiv** unter Berücksichtigung der Kinematik aus den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Armelementes i berechnen.

## Vorwärtsgleichungen

Eingabedaten

$q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)$

Startwerte der Rekursionsformeln

$\omega_0, \dot{\omega}_0, \vec{v}_0, \dot{\vec{v}}_0$

Rekursive Berechnung der Kinematik von der Basis zum Greifer (Vorwärtsgleichungen)

$$\omega_{i+1} = G_1(\omega_i, q_{i+1}, \dot{q}_{i+1})$$

$$\dot{\omega}_{i+1} = G_2(\omega_i, \dot{\omega}_i, q_{i+1}, \dot{q}_{i+1}, \ddot{q}_{i+1})$$

$$\vec{v}_{i+1} = G_3(\vec{v}_i, \omega_i, q_{i+1})$$

$$\dot{\vec{v}}_{i+1} = G_4(\dot{\vec{v}}_i, \omega_i, \dot{\omega}_i, q_{i+1})$$

$$\vec{v}_{s,i+1} = G_5(\vec{v}_{i+1}, \omega_{i+1})$$

$$\dot{\vec{v}}_{s,i+1} = G_6(\dot{\vec{v}}_{i+1}, \omega_{i+1}, \dot{\omega}_{i+1})$$

# Methode nach Newton-Euler

## Rückwärtsgleichungen

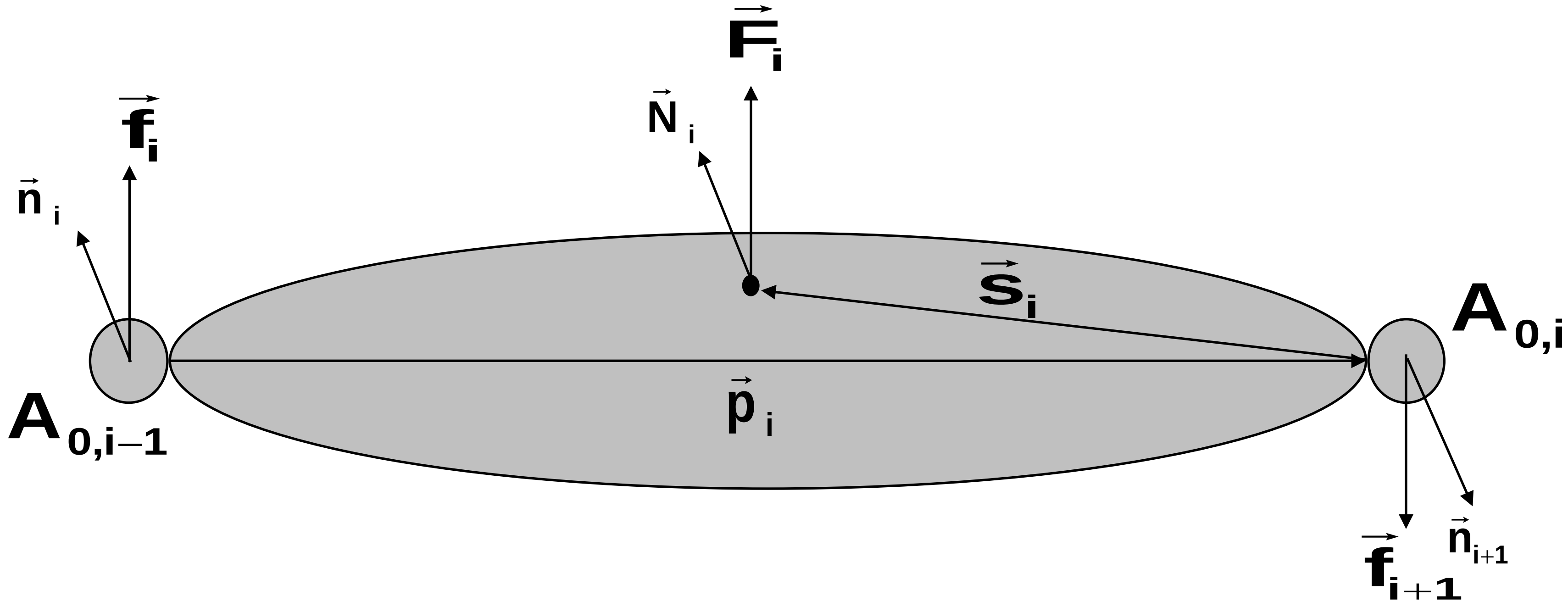
Beginnender vom Greifer des Roboters lassen sich die dynamische Größen des Systems rekursiv bis zur Basis berechnen. Dabei werden die im Vorwärtsschritt berechneten Größen verwendet.

Folgende dynamische Größen werden bestimmt:

- auftretende Kraft $\vec{F}_i$ im Schwerpunkt von Armelement i
- auftretender Drehimpuls $\vec{N}_i$ im Schwerpunkt von Armelement i
- Kraftvektor $\vec{f}_i$ ausgeübt von Armteil i-1 auf Armteil i
- Momentenvektor $\vec{n}_i$ ausgeübt von Armteil i-1 auf Armteil i
- skalarer Drehmomentvektor des i-ten Gelenks $Q_i$

# Methode nach Newton-Euler

## Rückwärtsgleichungen



## Rekursive Berechnung der dynamischen Größen

Unter Verwendung des Kraft-Momenten-Satzes:

$$\vec{F}_i = m_i \cdot \dot{\vec{v}}_{s,i} = \vec{f}_i - \vec{f}_{i+1}$$

aus Vorwärtsgleichungen

und des Drehimpulssatzes:

$$\vec{N}_i = \vec{I}_i \dot{\omega}_i = \vec{n}_i - \vec{n}_{i+1} + \left(-\vec{s}_i - \vec{p}_i\right) \times \vec{F}_i - \vec{p}_i \times \vec{f}_{i+1}$$

können rekursiv die dynamischen Größen des Armteils i berechnet werden.

$m_i$ : Masse des Armelements i

$\vec{I}_i$ : Massenträgheitsmoment

$\omega_i,\ \vec{s}_i, \vec{p}_i,\ \dot{\vec{v}}_i$ : bereits definiert in geometrischer Beschreibung

# Methode nach Newton-Euler

## Rückwärtsgleichungen

Rekursive Berechnung der Dynamik vom Greifer zur Basis (Rückwärtsgleichungen)

$$\vec{F}_i = H_1(\dot{\vec{v}}_{s,i})$$

$$\vec{N}_i = H_2(\omega_i, \dot{\omega}_i, q_i, \dot{q}_i)$$

$$\vec{f}_i = H_3(\vec{f}_{i+1}, \vec{F}_i, q_{i+1})$$

$$\vec{n}_i = H_4(\vec{n}_{i+1}, \vec{f}_{i+1}, \vec{F}_i, \vec{N}_i, q_{i+1})$$

$$Q_i = H_5(\vec{n}_i, q_i)$$

Externe Kräfte und Momente an Endeffektor als Startwerte

$$\vec{F}_n = \vec{F}_{EX}$$

$$\vec{N}_n = \vec{N}_{ex}$$

**Q(t)**

# Methode nach Newton-Euler

## Zusammenfassung

(Bewegung der Basis)

$$
\begin{tikzcd}
 & v_0,\dot{v}_0,\omega_0,\dot{\omega}_0 \arrow[d] & & & \\
q_1,\dot{q}_1,\ddot{q}_1 \arrow[r] & \circ \arrow[d] & & F_0, N_0 \arrow[r] & Q_0 \\
 & v_1,\dot{v}_1,\omega_1,\dot{\omega}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \begin{matrix} v_{s,1},\dot{v}_{s,1} \\ \omega_1,\dot{\omega}_1 \end{matrix} \arrow[r] & \circ \arrow[u] & \\
q_2,\dot{q}_2,\ddot{q}_2 \arrow[r] & \circ & & \vdots \arrow[u] & \\
 & \vdots \arrow[d] & & F_{n-1}, N_{n-1} \arrow[r] & Q_{n-1} \\
 & v_n,\dot{v}_n,\omega_n,\dot{\omega}_n \arrow[r] & \begin{matrix} v_{s,n},\dot{v}_{s,n} \\ \omega_n,\dot{\omega}_n \end{matrix} \arrow[r] & \circ \arrow[u] & \\
 & & & F_n, N_n \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

(Kräfte und Momente am EEF)

# Methode nach Newton-Euler

## Eigenschaften

- für beliebige Anzahl von Gelenken
- Belastungen der Armelemente werden berechnet
- Aufwand O(n)   (n = Anzahl der Gelenke)
- Rekursion

# VII. Robotermodellierung III

Ende